国防科技大学

2007年湖南省大学数学竞赛选拔赛试卷

参考解答

一、1．解：原式$=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{2n-1}{n}}\right)+\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\frac{1}{1+\frac{2n+1}{n}}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x+0=\frac{1}{2}\ln 3.$$

2．解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a+2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$，

代入得 $3(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(2+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$，则 $2+a-a^2=0,\ a\neq 2$，则$a=-1$．

3．$I=\iint\limits_{\Sigma}(x+1)^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}3[(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\,]\mathrm{d}v$，

$\iiint\limits_{\Omega}(z+1)^2\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}v+\frac{4}{3}\pi abc$，$D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}$，

所以，$\iiint\limits_{\Omega}z^2\,\mathrm{d}v=\int_{-c}^{c}z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma=\int_{-c}^{c}\pi abz^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3$，

由对称性，知 $I=\frac{4}{5}\pi abc(a^2+b^2+c^2)+4\pi abc$．

二、**1**．证：依题意，存在正常数M_0,M_3，使得对于一切$x\in(-\infty,+\infty)$，恒有：

$$|f(x)|\le M_0,\ |f'''(x)|\le M_3.$$

由泰勒公式

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)+\frac{1}{3!}f'''(\xi)，其中\xi介于x与x+1之间，$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)-\frac{1}{3!}f'''(\eta)，其中\eta介于x与x-1之间.$$

上述两式相加，整理得

$$f''(x)=f(x+1)-2f(x)+f(x-1)-\frac{1}{6}[f'''(\xi)-f'''(\eta)],$$

所以，$|f''(x)|\le|f(x+1)|+2|f(x)|+|f(x-1)|+\frac{1}{6}[|f'''(\xi)|+|f'''(\eta)|]\le 4M_0+\frac{M_3}{3}$.

再由两式相减，整理得

$$f'(x)=\frac{1}{2}[f(x+1)-f(x-1)]-\frac{1}{6}[f'''(\xi)+f'''(\eta)],$$

所以，$|f'(x)|\le\frac{1}{2}[|f(x+1)|+|f(x-1)|]+\frac{1}{6}[|f'''(\xi)|+|f'''(\eta)|]\le M_0+\frac{M_3}{3}$.

综上所述，函数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

2．证：作辅助函数 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2$，则 $F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=2g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少. 因为，$F'(0)=0$，则当 $x\le 0$ 时，$F'(x)\ge F'(0)=0$，当 $x>0$ 时，$F'(x)\le F'(0)=0$. 所以，$F(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 内单调增加，在 $(0,+\infty)$ 内单调减少，所以 $F(x)$ 在 $x=0$ 处取最大值，从而，对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $F(x)\le F(0)=0$，但 $F(x)\ge 0$，所以，$F(x)\equiv 0$．于是，$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\equiv 0$，所以，$f(x)\equiv 0$.

三、解：$a_n=\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{1+e^x}\mathrm{d}x\ \underline{\underline{t=-x}}\ -\int_{1}^{-1}\frac{t^{2n}}{1+e^{-t}}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x$，

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^{2n}\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^{-x}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^{2n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+1},\quad n=0,1,2,\cdots$$

记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，$-1\le x<1$，则 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$，

$S(0)=0$，于是 $S(x)=\arctan x$，所以，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

四、解：$\oint_{L(t)}f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=tf(t^2)\oint_{L(t)}\mathrm{d}s=2\pi t^2 f(t^2)$，

$$\oiint_{S(t)}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=t^2\iint_{S_{\text{上半球面}}}\mathrm{d}S+\iint_{S_{\text{底面}}}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=2\pi t^4+\frac{\pi}{2}t^4=\frac{5\pi}{2}t^4,$$

$$\iint_{D(t)}f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r,$$

$$\iiint_{\Omega(t)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^t r\,r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\pi t^4,$$

于是，$2\pi t^2 f(t^2)+\dfrac{5\pi}{2}t^4=2\pi\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r+\dfrac{1}{2}\pi t^4$，即 $t^2 f(t^2)+t^4=\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r$，

两边求导，得 $2t^3 f'(t^2)+2t\,f(t^2)+4t^3=t\,f(t^2)$，令 $u=t^2$，得 $f'(u)+\dfrac{1}{2u}f(u)=-2$，

解得 $f(u)=-\dfrac{4}{3}u+\dfrac{C}{\sqrt{u}}$，其中 C 为任意常数.

五、解：构造拉格朗日辅助函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j-\lambda(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-1),$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x_1}=2[(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n]=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=\dfrac{\partial f}{\partial x_2}-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x_2}=2[a_{11}x_1+(a_{12}-\lambda)x_2+\cdots+a_{1n}x_n]=0,\\ \cdots\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n}=\dfrac{\partial f}{\partial x_n}-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x_n}=2[a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+(a_{1n}-\lambda)x_n]=0,\end{cases}\qquad(1)$$

以及

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=1-\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0,\qquad(2)$$

方程组（1）有非零解 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$ 的充分必要条件是 λ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值．设 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$ 为（1）的非零解，将它代入方程（1)，各方程分别乘上 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n$，然后相加，并代入约束条件（2）得 $f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)=\lambda$．

所以，二次型函数在单位球面上的最大值与最小值只能是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值．于是，所求最大值与最小值分别是矩阵 $\mathbf{A}$ 的最大与最小特征值.

六、解：由 $\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\ \frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{bmatrix}=\cdots=\begin{bmatrix}2&-1\\ \frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$，

令 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-1\\ \frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，则 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=\dfrac{1}{2}$，

对应的特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，令 $\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$，则

$$\mathbf{A}^n=\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\&\dfrac{1}{2^n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-\dfrac{2}{2^n}&-2+\dfrac{2}{2^n}\\3-\dfrac{3}{2^n}&-2+\dfrac{3}{2^n}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+\dfrac{3}{2^n}&3-\dfrac{2}{2^n}\\-2+\dfrac{2}{2^n}&3-\dfrac{3}{2^n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5+\dfrac{4}{2^n}\\-5+\dfrac{6}{2^n}\end{bmatrix},$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-5,\ \ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=-5$.

七、证：（1）先将矩阵$\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{B}\end{pmatrix}$两列交换，这相当于右乘初等分块矩阵$\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$，再将第一列乘$(-1)$，这相当于右乘初等分块矩阵$\begin{pmatrix}-\mathbf{E}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{E}\end{pmatrix}$，最后将第二列乘$\mathbf{B}$加到第一列，这相当于右乘初等分块矩阵$\begin{pmatrix}\mathbf{E}&\mathbf{0}\\\mathbf{B}&\mathbf{E}\end{pmatrix}$，即

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\mathbf{E}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}&\mathbf{0}\\\mathbf{B}&\mathbf{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{AB}-\mathbf{E}&\mathbf{A}\\-\mathbf{BE}+\mathbf{EB}&\mathbf{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{AB}-\mathbf{E}&\mathbf{A}\\\mathbf{0}&\mathbf{E}\end{pmatrix},$$

两边同取行列式，得

$$\begin{vmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{B}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-\mathbf{E}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{E}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{E}&\mathbf{0}\\\mathbf{B}&\mathbf{E}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{AB}-\mathbf{E}&\mathbf{A}\\\mathbf{0}&\mathbf{E}\end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{B}\end{vmatrix}=|\,\mathbf{AB}-\mathbf{E}\,|.$$

（2）已知$\mathbf{E}-\mathbf{AB}$可逆，由可逆的充要条件，$|\mathbf{E}-\mathbf{AB}|\neq0$，即$|\mathbf{AB}-\mathbf{E}|\neq0$．由（1）知，

$$\begin{vmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{B}\end{vmatrix}=|\,\mathbf{AB}-\mathbf{E}\,|,$$

从而有

$$\begin{vmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{A}\end{vmatrix}=|\,\mathbf{BA}-\mathbf{E}\,|,$$

又

$$\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{B}&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{E}\\\mathbf{E}&\mathbf{B}\end{pmatrix},$$

两边取行列式，得

$$\begin{vmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}\\ \mathbf{E} & \mathbf{0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{E}\\ \mathbf{E} & \mathbf{A}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}\\ \mathbf{E} & \mathbf{0}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{E}\\ \mathbf{E} & \mathbf{B}\end{vmatrix},$$

由于$\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{E}\\ \mathbf{E} & \mathbf{B}\end{vmatrix}=|\mathbf{AB}-\mathbf{E}|\neq 0$，故$\begin{vmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}\\ \mathbf{E} & \mathbf{0}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{E}\\ \mathbf{E} & \mathbf{A}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}\\ \mathbf{E} & \mathbf{0}\end{vmatrix}\neq 0$，又$\begin{vmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}\\ \mathbf{E} & \mathbf{0}\end{vmatrix}\neq 0$，所以

$\begin{vmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{E}\\ \mathbf{E} & \mathbf{A}\end{vmatrix}=|\mathbf{BA}-\mathbf{E}|=|\mathbf{E}-\mathbf{BA}|\neq 0$，从而$\mathbf{E}-\mathbf{BA}$也可逆.

八、解：

（1）$f(x,y)=\begin{cases}1, & |x|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}},|x|-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le y\le -|x|+\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（**2**）$f_X(x)=\begin{cases}\sqrt{2}-2|x|, & |x|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{2}-2|y|, & |y|\le\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（**3**）当$|x|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}-2|x|}, & |x|-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le y\le -|x|+\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（**4**）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2C\operatorname{ov}(X,Y)$，

$EX=0=EY,\ D(X)=EX^2=\dfrac{1}{12}=D(Y)$，

$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0$，

$\therefore\ D(X+Y)=2\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{6}$.

九、解：（1）

$\begin{cases}X_i=\mu_1+\varepsilon_{1i}, i=1,2,\cdots,n_1,\\ \varepsilon_{1i}\sim N(0,\sigma^2),\end{cases}$，且$\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\cdots,\varepsilon_{1n_1}$相互独立，

$\begin{cases}Y_i=\mu_2+\varepsilon_{2i}, i=1,2,\cdots,n_2,\\ \varepsilon_{2i}\sim N(0,\sigma^2),\end{cases}$，且$\varepsilon_{21},\varepsilon_{22},\cdots,\varepsilon_{2n_2}$相互独立，

所以$X_1,X_2,\cdots X_{n_1}\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y_1,Y_2,\cdots Y_{n_2}\sim N(\mu_2,\sigma^2)$. 似然函数

$$L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(X_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}\prod_{i=1}^{n_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(Y_i-\mu_2)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n_1+n_2}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2\right]}$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu_1}\triangleq 0\\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu_2}\triangleq 0\\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2}\triangleq 0\end{cases},$$

解得 $\hat{\mu}_1=\bar{X}$，$\hat{\mu}_2=\bar{Y}$， $\hat{\sigma}^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}{n_1+n_2}=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2}$.

（2）由于 $E\hat{\mu}_i=\mu_i$，$i=1,2$，$E\hat{\sigma}^2=\dfrac{n_1+n_2-2}{n_1+n_2}\sigma^2$，故 $\hat{\mu}_i$ 是 μ_i 的无偏估计 $(i=1,2)$，而 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的有偏估计.

（3）检验统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}},\ S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2},$$

拒绝域为 $|T|\geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$.